

Determinantes. Ejercicios y problemas

1 Demostrar, sin desarrollar, que los siguientes determinantes valen cero:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} a & 3a & 4a \\ a & 5a & 6a \\ a & 7a & 8a \end{vmatrix}$$

2 Sabiendo que $|A|=5$, calcula los otros determinantes.

$$A = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$B = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

3 Demostrar que los siguientes determinantes son múltiplos de 5 y 4 respectivamente, sin desarrollarlos

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

4 Demostrar, sin desarrollar, que el siguiente determinante es múltiplo de 15:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

5 Demuéstrese las igualdades que se indican, sin necesidad de desarrollar los determinantes:

$$\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ p+q & q+r & r+p \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & ca \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

6 Resolver las siguientes ecuaciones sin desarrollar los determinantes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$$

7 Aplicando las propiedades de los determinantes, calcular:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$$

8 Pasando a determinantes triangulares, calcular el valor de:

$$A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

9 Calcular los determinantes de Vandermonde:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

10 Hallar la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{no}$$

11 Para qué valores de x la matriz admite matriz inversa?

12 Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

13 Resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

1 $A \cdot X = B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

2 $X \cdot A + B = C$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinantes. Ejercicios

1 Si el valor del determinante

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$$

Calcular el valor de:

$$B = \begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$$

2 Demostrar que el siguiente determinante es divisible por 21:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

3 Aplicando las propiedades de los determinantes, calcular:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 16 & 36 & 64 \\ 8 & 64 & 216 & 512 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

4 Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & a & a & a & a \\ a & 3 & a & a & a \\ a & a & 3 & a & a \\ a & a & a & 3 & a \\ a & a & a & a & 3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \end{vmatrix}$$

5 ¿Para qué valores de x la matriz admite matriz inversa?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{no}$$

6 Resolver la ecuación matricial:

$$A \cdot X + 2 \cdot B = 3 \cdot C$$

Calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 82 & 0 & 3 \\ 2 & 23 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

2 Aplicando las propiedades de los determinantes, calcular:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$$

3 Aplicando las propiedades de los determinantes, calcular:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 16 & 36 & 64 \\ 8 & 64 & 216 & 512 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

4 Pasando a determinantes triangulares, calcular el valor de:

$$A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

5 Calcular los determinantes de Vandermonde:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

6 Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & a & a & a & a \\ a & 3 & a & a & a \\ a & a & 3 & a & a \\ a & a & a & 3 & a \\ a & a & a & a & 3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \end{vmatrix}$$

7 Demostrar, sin desarrollar, que los siguientes determinantes valen cero:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} a & 3a & 4a \\ a & 5a & 6a \\ a & 7a & 8a \end{vmatrix}$$

8 Si el valor del determinante $A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$. Calcular el

valor de: $B = \begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$

9 Sabiendo que $|A|=5$, calcula los otros determinantes.

$$A = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad B = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

10 Demostrar que los siguientes determinantes son múltiplos de 5 y 4 respectivamente, sin desarrollarlos

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

11 Demostrar, sin desarrollar, que el siguiente determinante es múltiplo de 15:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

12 Demostrar que el siguiente determinante es divisible por 21:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

13 Demuéstrese las igualdades que se indican, sin necesidad de desarrollar los determinantes:

$$1 \quad \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ p+q & q+r & r+p \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$2 \quad \begin{vmatrix} a^2 & a & bc \\ b^2 & b & ca \\ c^2 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & 1 \\ b^3 & b^2 & 1 \\ c^3 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

14 Resolver las siguientes ecuaciones sin desarrollar los determinantes.

$$1 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$2 \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$$

15 Hallar la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

16 Para qué valores de x la matriz admite matriz inversa?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{no}$$

17 ¿Para qué valores de x la matriz admite matriz inversa?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{no}$$

18 Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$1 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2 \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3 \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

19 Resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

$$1 \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

$$2 \quad \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

20 Resolver la ecuación matricial:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + 2 \cdot \mathbf{B} = 3 \cdot \mathbf{C}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$