Guía
Del estudiante
Modalidad a distancia

Modulo

MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES PARA INGENIERÍA DE SISTEMAS

I SEMESTRE

DATOS DE IDENTIFICACION

TUTOR	**Luis Enrique Alvarado Vargas**
Teléfono	**435 29 52 – CEL. 310 768 90 67**
E-mail	**leav70@gmail.com**
Lugar	**Madrid Cundinamarca**

Corporación Universitaria Minuto de Dios – Rectoría Cundinamarca

BIENVENIDA

EL curso de Matemática Fundamental permite indicar un proceso de formación de Ingenieros de Sistemas que apropien competencias interpretativas, argumentativas y propositivas y competencias ciudadanas como líderes integrales en sus desempeños el curso pretende fortalecer procesos.

Fundamentos del Pensamiento Humano: Que le permiten apropiarse del lenguaje matemático en lo referente al pensamiento variacional y las estructuras algebraicas para la contextualización de su entorno.

pensamiento variacional y sistemas algebraicos: Solución de problemas y generalización, investiguen en la selección de herramientas matemáticas que le permitan ver las situaciones del mundo como una regla bien general.

Autoformación: A partir del estudio auto programado del dialogo de saberes como resultado del trabajo en equipo para la construcción y socialización del conocimiento de la investigación y acción de las prácticas.

Trabajo Cooperativo: El curso propende por el trabajo en equipo con toda la comunidad para el desarrollo del proyecto de investigación.

El propósito de formación de este curso es facilitar al estudiante de administración Agropecuaria es vivenciar por contexto y las demás áreas del programa el desarrollo de las competencias que le permitan utilizar el lenguaje y herramientas necesarias en las acciones propias del trabajo en equipo.

El curso esta propuesto acorde a los principios expuestos por la universidad del Tolima, el IDEAD y el programa de Ingeniería de Sistemas, los cuáles dan preeminencia a los procesos de auto formación del ser humano y el Ingeniero ya que la implementación de herramientas didácticas y métodos mentales de la modalidad a distancia, que deben esforzarse a muchas horas de estudio individual y grupal sin la presencia física del tutor.

INTRODUCCIÓN

El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos han contribuido al desarrollo de las diferentes áreas de desempeño de los ciudadanos. en el actual siglo nadie pone en duda la aplicabilidad de la matemática y en especifico los sistemas algebraicos para resolver situaciones que se le presentan al individuo en el proceso de formación como Ingeniero de Sistemas las expresiones algebraicas se aplican por ejemplo para resolver situaciones problema en las que deseamos plantear una regla de asignación en algoritmos. Estas situaciones planteadas de manera matemática han permitido desarrollar la ciencia y la tecnología.

Queda para los estudiantes la construcción conjunta de un conjunto de problemas relacionados con la carrera para que le veamos una real aplicación y le encontremos sentido al estudio del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos.

Este componente del currículo tiene en cuenta una de las aplicaciones más importantes de la matemática: la formulación de modelos matemáticos para diversos fenómenos. Por ello, debe permitir que los estudiantes adquieran progresivamente una comprensión de patrones, relaciones y funciones, así como desarrollar su capacidad de representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas mediante símbolos algebraicos y gráficas apropiadas. Así mismo, debe desarrollar en ellos la capacidad de analizar el cambio en varios contextos y de utilizar modelos matemáticos para entender y representar relaciones cuantitativas.

UNIDAD DE TRABAJO No.2

- ¿Cómo aplicar el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos a la Ingeniería de Sistemas?
- ¿A través las expresiones algebraicas se puede solucionar

ALGEBRA BÁSICA

CONTENIDOS

1. Expresiones algebraicas.
   - monomios
   - polinomios
2. Operaciones con polinomios.
   - *Suma*
   - *Resta*
   - *Multiplicación*
   - *División*
3. Regla de Ruffini.
4. *Productos y cocientes notables*
5. Teorema del residuo (resto)
6. Factorización de polinomios
7. Fracciones algebraicas.
8. *Ejercicios*

Indicadores de logro

1. Reconoce las expresiones algebraicas, las clasifica y las ordena.
2. realiza las cuatro operaciones básicas con expresiones algebraicas (polinomios).
3. Aplica la regla de Ruffini para encontrar las raíces de un polinomio.
4. resuelve problemas en los que aplica la factorización y los productos notables

Definición de monomio

Un **monomio** es una **expresión algebraica** en la que las únicas **operaciones** que aparecen entre las variables son el **producto y la potencia de exponente natural**.

$2x^2y^3z$

Partes de un monomio

Coeficiente

El **coeficiente** del **monomio** es el número que aparece multiplicando a las variables.

Parte literal

La **parte literal** está constituida por las letras y sus exponentes.

$$\text{coeficiente} \leftarrow \boxed{3}\ \boxed{x} \rightarrow \text{Parte literal}$$

$$\text{coeficiente} \leftarrow \boxed{-5}\ \boxed{x^2} \rightarrow \text{Parte literal}$$

$$\text{coeficiente} \leftarrow \boxed{\frac{3}{2}}\ \boxed{x^3} \rightarrow \text{Parte literal}$$

$$\text{coeficiente} \leftarrow \boxed{\sqrt{3}}\ \boxed{x^2y} \rightarrow \text{Parte literal}$$

Grado

El **grado** de un **monomio** es la suma de todos los exponentes de las letras o variables.

El grado de $2x^2 y^3 z$ es: $2 + 3 + 1 = 6$

Monomios semejantes

Dos **monomios** son **semejantes** cuando tienen la **misma parte literal**.

$2x^2 y^3 z$ es semejante a $5x^2 y^3 z$

Operaciones con monomios

Suma de monomios

Sólo podemos **sumar monomios semejantes**.

La suma de los monomios es otro monomio que tiene la misma parte literal y cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes.

$$\mathbf{ax^n + bx^n = (a + b)x^n}$$

$$2x^2 y^3 z + 3x^2 y^3 z = 5x^2 y^3 z$$

Si los **monomios no** son **semejantes** se obtiene un **polinomio**.

$$2x^2 y^3 + 3x^2 y^3 z$$

Producto de un número por un monomio

El **producto de un número por un monomio** es otro **monomio semejante** cuyo **coeficiente** es el **producto del coeficiente** de monomio **por el número**.

$5 \cdot (2x^2 y^3 z) = 10x^2 y^3 z$

Multiplicación de monomios

La **multiplicación de monomios** es otro **monomio** que tiene por **coeficiente el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando las potencias que tenga la misma base.**

$\mathbf{ax^n \cdot bx^m = (a \cdot b)x^{n+m}}$

$(5x^2 y^3 z) \cdot (2 y^2 z^2) = 10 x^2 y^5 z^3$

División de monomios

Sólo se pueden **dividir monomios** con la **misma parte literal** y con el **grado del dividendo mayor o igual** que el **grado** de la variable correspondiente del **divisor**.

La **división de monomios** es otro **monomio** que tiene por **coeficiente el cociente de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene dividiendo las potencias que tenga la misma base.**

$\mathbf{ax^n : bx^m = (a : b)x^{n-m}}$

$$\frac{6x^3y^4z^2}{3x^2y^2z^2} = 2xy^2$$

Si el **grado del divisor es mayor**, obtenemos una **fracción algebraica**.

$$\frac{6x^3y^4z^2}{3x^5y^2z^4} = \frac{2y^2}{x^2z^2}$$

Potencia de un monomio

Para realizar la **potencia de un monomio** se eleva, cada elemento de éste, al exponente de la potencia.

$(ax^n)^m = a^m \cdot x^{n \cdot m}$

$(2x^3)^3 = 2^3(x^3)^3 = 8x^9$

$(-3x^2)^3 = (-3)^3 (x^2)^3 = -27x^6$

Ejercicios resueltos de monomios

1 Indica cuales de las siguientes expresiones son **monomios**. En caso afirmativo, indica su **grado** y **coeficiente**.

1 $3x^3$

Grado del monomio: **3** , **coefeciente**: **3**

2 $5x^{-3}$

No es un **monomio**, porque el exponente no es un número natural.

3 $3x + 1$

No es un **monomio**, porque hay una suma.

4 $\sqrt{2}\,x$

Grado del monomio: **1** , coefeciente: $\sqrt{2}$

5 $-\frac{3}{4}x^4$

Grado del monomio: 4 , coefeciente: $-\frac{3}{4}$

6 $-\frac{3}{x^4}$

No es un **monomio**, porque no tiene exponente natural.

7 $2\sqrt{x}$

No es un **monomio**, porque la parte literal está dentro de una raíz.

2 Realiza las sumas y restas de monomios.

1 $2x^2y^3z + 3x^2y^3z =$ $\mathbf{5x^2y^3z}$

2 $2x^3 - 5x^3 =$ $\mathbf{-3x^3}$

3 $3x^4 - 2x^4 + 7x^4 =$ $\mathbf{8x^4}$

4 $2a^2bc^3 - 5a^2bc^3 + 3a^2bc^3 - 2a^2bc^3 =$ $\mathbf{-2a^2bc^3}$

3 Efectúa los **productos de monomios**.

1 $(2x^3) \cdot (5x^3) =$ $\mathbf{10x^6}$

2 $(12x^3) \cdot (4x) =$ $\mathbf{48x^4}$

3 $5 \cdot (2x^2y^3z) =$ $\mathbf{10x^2y^3z}$

4 $(5x^2\ y^3\ z)\cdot(2\ y^2\ z^2) =$ **$10\ x^2\ y^5\ z^3$**

5 $(18x^3\ y^2\ z^5)\cdot(6x^3\ y\ z^2) =$ **$108x^6\ y^3\ z^7$**

6 $(-2x^3)\cdot(-5x)\cdot(-3x^2) =$ **$-30x^6$**

4 Realiza las **divisiones de monomios**.

1 $(12x^3) : (4x) =$ **$3x^2$**

2 $(18x^6\ y^2\ z^5) : (6x^3\ y\ z^2) =$ **$3x^3\ y\ z^3$**

3 $(36\ x^3\ y^7\ z^{4)} : (12x^2\ y^2) =$ **$3xy^5\ z^4$**

4 $\frac{6x^3y^4z^2}{3x^2y^2z^2} = 2xy^2$

5 $\frac{24x^5y^4 + 18x^4y^5 - 48x^{10}y^3}{6x^2y^3} =$ **$4x^3y + 3x^2y^2 - 7x^8$**

6 $\frac{12x^3y^5 + 18x^5y^7 - 48x^{12}y^6}{3x^2y^2} = 4xy^3 + 6x^3y^5 - 16x^{10}y^4$

5 Calcula las **potencias de los monomios**.

1 $(2x^3)^3 = 2^3(x^3)^3 =$ **$8x^9$**

2 $(-3x^2)^3 = (-3)^3(x^3)^2 =$ **$-27x^6$**

3 $\left(\frac{2}{3}x^3\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2(x^3)^2 = \frac{4}{9}x^6$

Definición de polinomio

Un **polinomio** es una **expresión algebraica** compuesta de **dos o más monomios**.

Un **polinomio** es una **expresión algebraica** de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

Siendo a_n, a_{n-1} ... a_1, a_0 números, llamados **coeficientes**.

a_0 es el término independiente.

Grado de un polinomio

El **grado** de un polinomio P(x) es el **mayor exponente** al que se encuentra elevada la **variable** x.

Polinomio de grado cero

$P(x) = 2$

Polinomio de primer grado

$P(x) = 3x + 2$

Polinomio de segundo grado

$P(x) = 2x^2 + 3x + 2$

Polinomio de tercer grado

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

Polinomio de cuarto grado

$P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

Clases de polinomios

Polinomio nulo

El **polinomio nulo** tiene todos sus **coeficientes nulos**.

Polinomio homogéneo

El **polinomio homogéneo** tiene todos sus **términos** o **monomios** con el **mismo grado**.

$P(x) = 2x^2 + 3xy$

Polinomio heterogéneo

Los **términos** de un **polinomio heterogéneo** son de **distinto grado**.

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3$

Polinomio completo

Un **polinomio completo** tiene **todos los términos** desde el término independiente hasta el término de mayor grado.

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 3$

Polinomio ordenado

Un **polinomio** está **ordenado** si los **monomios** que lo forman están escritos de **mayor a menor grado**.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$

Polinomios iguales

Dos polinomios son iguales si verifican:

1 Los dos polinomios tienen el **mismo grado**.

2 Los **coeficientes** de los términos del mismo grado son i**guales**.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$

$Q(x) = 5x - 3 + 2x^3$

Polinomios semejantes

Dos polinomios son semejantes si verifican que tienen **la misma parte literal.**

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$

$Q(x) = 5x^3 - 2x - 7$

Tipos de polinomios según el número de términos

Monomio

Es un **polinomio** que consta de **un** sólo **monomio**.

$P(x) = 2x^2$

Binomio

Es un **polinomio** que consta de **dos monomios**.

$P(x) = 2x^2 + 3x$

Trinomio

Es un **polinomio** que consta de **tres monomios**.

$P(x) = 2x^2 + 3x + 5$

Valor numérico de un polinomio

Es el resultado que obtenemos al sustituir la variable x por un número cualquiera.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3 \; ; \; x = 1$

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 - 3 = 2 + 5 - 3 = 4$

Ejercicios resueltos de polinomios

1 Di si las siguientes expresiones algebraicas son polinomios o no. En caso afirmativo, señala cuál es su grado y término independiente.

1 $x^4 - 3x^5 + 2x^2 + 5$

Grado: 5, término independiente: 5.

2 $\sqrt{x} + 7X^2 + 2$

No, porque la parte literal del primer monomio está dentro de una raíz.

3 $1 - x^4$

Grado: 4, término independiente: 1.

4 $\frac{2}{x^2} - x - 7$

No, porque el exponente del primer monomio no es un número natural.

5 $x^3 + x^5 + x^2$

Grado: 5, término independiente: 0.

6 $x - 2x^{-3} + 8$

No, porque el exponente del 2º monomio no es un número natural.

7 $x^3 - x - \frac{7}{2}$

Grado: 3, término independiente: -7/2.

2 Escribe:

1 Un polinomio ordenado sin término independiente.

$3x^4 - 2x$

2 Un polinomio no ordenado y completo.

$3x - x^2 + 5 - 2x^3$

3 Un polinomio completo sin término independiente.

Imposible

4 Un polinomio de grado 4, completo y con coeficientes impares.

$x^4 - x^3 - x^2 + 3x + 5$

Suma de polinomios

Para sumar dos polinomios se suman los coeficientes de los términos del mismo grado.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$ $\qquad$ $Q(x) = 4x - 3x^2 + 2x^3$

1 Ordenamos los **polinomios**, si no lo están.

$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

$P(x) + Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) + (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

2 Agrupamos los **monomios** del **mismo grado**.

$P(x) + Q(x) = 2x^3 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 4x - 3$

3 Sumamos los monomios semejantes.

$P(x) + Q(x) = 4x^3 - 3x^2 + 9x - 3$

Resta de polinomios

La resta de polinomios consiste en **sumar el opuesto del sustraendo**.

$P(x) - Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

$P(x) - Q(x) = 2x^3 + 5x - 3 - 2x^3 + 3x^2 - 4x$

$P(x) - Q(x) = 2x^3 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 4x - 3$

$P(x) - Q(x) = 3x^2 + x - 3$

Multiplicación de polinomios

Multiplicación de un número por un polinomio

Es otro **polinomio** que tiene de **grado** el **mismo** del polinomio y como **coeficientes** el **producto de los coeficientes del polinomio por el número**.

$3 \cdot (2x^3 - 3 x^2 + 4x - 2) = 6x^3 - 9x^2 + 12x - 6$

Multiplicación de un monomio por un polinomio

Se **multiplica el monomio** por todos y **cada** uno de los **monomios que forman el polinomio**.

$3 x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 6x^2$

Multiplicación de polinomios

$P(x) = 2x^2 - 3 \quad Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos segundo polinomio.

$P(x) \cdot Q(x) = (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) =$

$= 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x =$

Se suman los monomios del mismo grado.

$= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$

Se obtiene otro polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios que se multiplican.

También podemos **multiplicar polinomios** de siguiente modo:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 4x \\ 2x^2 - 3 \\ \hline -6x^3 + 9x^2 - 12x \\ 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 \qquad\qquad\quad \\ \hline 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x \end{array}$$

División de polinomios

Resolver la división de polinomios:

$P(x) = 2x^5 + 2x^3 - x - 8$ $\quad Q(x) = 3x^2 - 2x + 1$

P(x) : Q(x)

A la izquierda situamos el dividendo. Si el polinomio **no es completo** dejamos **huecos** en los lugares que correspondan.

$$x^5 \qquad + 2x^3 \qquad - x - 8 \qquad \underline{\big|\, x^2 - 2x + 1}$$

A la derecha situamos el divisor dentro de una caja.

Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

$x^5 : x^2 = x^3$

Multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y lo restamos del polinomio dividendo:

$$\begin{array}{llll|l} x^5 & & +2x^3 & -x-8 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{5-5} -x^5 & +2x^4 & -x^3 & & x^3 \\ \cline{1-3} & 2x^4 & +x^3 & -x-8 & \end{array}$$

Volvemos a **dividir** el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor. Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

$2x^4 : x^2 = 2\ x^2$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 \quad +2x^3 \quad -x-8 & x^2-2x+1 \\ \hline
\underline{-x^5+2x^4-x^3} & x^3+2x^2 \\
\quad 2x^4+\ x^3 \quad -x-8 & \\
\underline{\quad -2x^4+4x^3-2x^2} & \\
\quad\quad 5x^3-2\ x^2-\ x-8 &
\end{array}$$

Procedemos igual que antes.

$5x^3 : x^2 = 5\ x$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 \quad +2x^3 \quad -x-8 & x^2-2x+1 \\ \hline
\underline{-x^5+2x^4-x^3} & x^3+2x^2+5x \\
\quad 2x^4+\ x^3 \quad -x-8 & \\
\underline{\quad -2x^4+4x^3-2x^2} & \\
\quad\quad 5x^3-2\ x^2-\ x-8 & \\
\underline{\quad\quad -5x^3+10x^2-5x} & \\
\quad\quad\quad 8x^2-6\ x-8 &
\end{array}$$

Volvemos a hacer las mismas operaciones.

$8x^2 : x^2 = 8$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 \quad +2x^3 \quad -x-8 & x^2-2x+1 \\ \hline
\underline{-x^5+2x^4-x^3} & x^3+2x^2+5x+8 \\
\quad 2x^4+\ x^3 & \\
\underline{\quad -2x^4+4x^3-2x^2} & \\
\quad\quad 5x^3-2\ x^2-\ x & \\
\underline{\quad\quad -5x^3+10x^2-5x} & \\
\quad\quad\quad 8x^2-6\ x-8 & \\
\underline{\quad\quad\quad -8x^2+16x-8} & \\
\quad\quad\quad\quad 10x-16 &
\end{array}$$

$10x - 6$ es el **resto**, porque su **grado es menor que el del divisor** y por tanto no se puede continuar dividiendo.

x^3+2x^2+5x+8 es el **cociente**.

División por Ruffini

Si el **divisor es un binomio de la forma x — a**, entonces utilizamos un **método más breve** para hacer la **división**, llamado **regla de Ruffini**.

Resolver por la regla de Ruffini la división:

$(x^4 -3x^2 +2) : (x -3)$

1Si el polinomio no es completo, lo completamos añadiendo los términos que faltan con ceros.

2Colocamos los coeficientes del dividendo en una línea.

3Abajo a la izquierda colocamos el opuesto del término independendiente del divisor.

4Trazamos una raya y bajamos el primer coeficiente.

	1	0	-3	0	2
3					
	1				

5Multiplicamos ese coeficiente por el divisor y lo colocamos debajo del siguiente término.

	1	0	-3	0	2
3		3			
	1				

6Sumamos los dos coeficientes.

	1	0	-3	0	2
3		3			
	1	3			

7Repetimos el proceso anterior.

	1	0	-3	0	2
3		3	9		
	1	3	6		

Volvemos a repetir el proceso.

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	
	1	3	6	18	

Volvemos a repetir.

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

8El último número obtenido, 56 , es el resto.

9El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo y cuyos coeficientes son los que hemos obtenido.

$x^3 + 3x^2 + 6x + 18$

Ejercicios y problemas resueltos de polinomios

1Dados los polinomios:

$P(x) = 4x^2 - 1$

$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$

$R(x) = 6x^2 + x + 1$

$S(x) = 1/2x^2 + 4$

$T(x) = 3/2x^2 + 5$

$U(x) = x^2 + 2$

Calcular:

1 $P(x) + Q(x) =$

$= (4x^2 - 1) + (x^3 - 3x^2 + 6x - 2) =$

$= x^3 - 3x^2 + 4x^2 + 6x - 2 - 1 =$

$= \mathbf{x^3 + x^2 + 6x - 3}$

2 $P(x) - U(x) =$

$= (4x^2 - 1) - (x^2 + 2) =$

$= 4x^2 - 1 - x^2 - 2 =$

$= \mathbf{3x^2 - 3}$

3 $P(x) + R(x) =$

$= (4x^2 - 1) + (6x^2 + x + 1) =$

$= 4x^2 + 6x^2 + x - 1 + 1 =$

$= \mathbf{10x^2 + x}$

4 $2P(x) - R(x) =$

$= 2(4x^2 - 1) - (6x^2 + x + 1) =$

$= 8x^2 - 2 - 6x^2 - x - 1 =$

$=$ **$2x^2 - x - 3$**

5 $S(x) + R(x) + U(x) =$

$= (1/2\ x^2 + 4) + (3/2\ x^2 + 5) + (x^2 + 2) =$

$= 1/2\ x^2 + 3/2\ x^2 + x^2 + 4 + 5 + 2 =$

$=$ **$3x^2 + 11$**

6 $S(x) - R(x) + U(x) =$

$= (1/2\ x^2 + 4) - (3/2\ x^2 + 5) + (x^2 + 2) =$

$= 1/2\ x^2 + 4 - 3/2\ x^2 - 5 + x^2 + 2 =$

$=$ **1**

2 Dados los polinomios:

$P(x) = x^4 - 2x^2 - 6x - 1$

$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 4$

$R(x) = 2x^4 - 2x - 2$

Calcular:

$P(x) + Q(x) - R(x) =$

$= (x^4 - 2x^2 - 6x - 1) + (x^3 - 6x^2 + 4) - (2x^4 - 2x - 2) =$

$= x^4 - 2x^2 - 6x - 1 + x^3 - 6x^2 + 4 - 2x^4 + 2x + 2 =$

$= x^4 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x^2 - 6x + 2x - 1 + 4 + 2 =$

$= \mathbf{-x^4 + x^3 - 8x^2 - 4x + 5}$

$P(x) + 2\,Q(x) - R(x) =$

$=(x^4 -2x^2 - 6x - 1) + 2(x^3 - 6x^2 + 4) - (2x^4 -2\,x - 2) =$

$= x^4 -2x^2 - 6x - 1 +2x^3 - 12x^2 + 8 - 2x^4 + 2\,x + 2 =$

$= x^4 - 2x^4 + 2x^3 -2x^2 - 12x^2 - 6x + 2\,x - 1 + 8 + 2 =$

$= \mathbf{-x^4 + 2x^3 - 14x^2 - 4x + 9}$

$Q(x)+ R(x) - P(x)=$

$= (x^3 - 6x^2 + 4) + (2x^4 -2\,x - 2) - (x^4 -2x^2 - 6x - 1) =$

$= x^3 - 6x^2 + 4 + 2x^4 -2\,x - 2 - x^4 +2x^2 + 6x + 1=$

$= 2x^4 - x^4 + x^3 - 6x^2 +2x^2 -2\,x + 6x + 4- 2 + 1=$

$= \mathbf{x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x + 3}$

1 $(x^4 -2x^2 +2) \cdot (x^2 -2x +3) =$

$= x^6 -2x^5 + 3x^4 - 2x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 2x^2 - 4x +6=$

$= x^6 -2x^5 - 2x^4 + 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 6x^2 - 4x +6 =$

$= \mathbf{x^6 -2x^5 + x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 4x + 6}$

2 $(3x^2 - 5x) \cdot (2x^3 + 4x^2 - x +2) =$

$= 6x^5 + 12x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x^4 - 20x^3 + 5x^2 - 10x =$

$= 6x^5 + 12x^4 - 10x^4 - 3x^3 - 20x^3 + 6x^2 + 5x^2 - 10x =$

$= \mathbf{6x^5 + 2x^4 - 23x^3 + 11x^2 - 10x}$

3 $(2x^2 - 5x + 6) \cdot (3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 4x - 3) =$

$= 6x^6 - 10x^5 - 12x^4 + 8x^3 - 6x^2 -$

$- 15x^5 + 25x^4 + 30x^3 - 20x^2 + 15x +$

$+18x^4 - 30x^3 - 36x^2 + 24x - 18 =$

$= 6x^6 - 10x^5 - 15x^5 - 12x^4 + 25x^4 + 18x^4 +$

$+8x^3 - 30x^3 + 30x^3 - 6x^2 - 20x^2 - 36x^2 + 15x + 24x - 18 =$

$= \mathbf{6x^6 - 25x^5 + 31x^4 + 8x^3 - 62x^2 + 39x - 18}$

3 Dividir los polinomios:

1 $(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20) : (x^2 + 3x - 2)$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^4 - 3x^3 + 2x^2} & x^2 - 5x + 6 \\
\quad -5x^3 - 9x^2 + 30x & \\
\quad \underline{5x^3 + 15x^2 - 10x} & \\
\qquad 6x^2 + 20x - 20 & \\
\qquad \underline{-6x^2 - 18x + 12} & \\
\qquad\qquad 2x - 8 &
\end{array}
$$

2 $(x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 2x) : (x^2 - x + 3)$

$$
\begin{array}{llll|l}
x^6 & +5x^4 & +3x^2 & -2x & x^2 - x + 3 \\ \cline{5-5}
\underline{-x^6 + x^5 - 3x^4} & & & & x^4 + x^3 + 3x^2 - 6 \\
\quad x^5 + 2x^4 & & & & \\
\underline{\quad -x^5 + x^4 - 3x^3} & & & & \\
\qquad 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 & & & & \\
\underline{\qquad -3x^4 + 3x^3 - 9x^2} & & & & \\
\qquad\qquad -6x^2 - 2x & & & & \\
\underline{\qquad\qquad 6x^2 - 6x + 18} & & & & \\
\qquad\qquad\quad -8x + 18 & & & &
\end{array}
$$

3 $P(x) = 2x^5 + 2x^3 - x - 8 \qquad Q(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$$
\begin{array}{llll|l}
x^5 & +2x^3 & & -x-8 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{5-5}
\underline{-x^5 + 2x^4 - x^3} & & & & x^3 + 2x^2 + 5x + 8 \\
\quad 2x^4 + x^3 & & & & \\
\underline{\quad -2x^4 + 4x^3 - 2x^2} & & & & \\
\qquad 5x^3 - 2x^2 - x & & & & \\
\underline{\qquad -5x^3 + 10x^2 - 5x} & & & & \\
\qquad\qquad 8x^2 - 6x - 8 & & & & \\
\underline{\qquad\qquad -8x^2 + 16x - 8} & & & & \\
\qquad\qquad\quad 10x - 16 & & & &
\end{array}
$$

4 Dividir por Ruffini:

1 $(x^3 + 2x + 70) : (x+4)$

	1	0	2	70
-4		-4	16	-72
	1	-4	18	-2

$C(x) = x^2 - 4x + 18 \qquad R(x) = -2$

2 $(x^5 - 32) : (x - 2)$

	1	0	0	0	0	-32
2		2	4	8	16	32
	1	2	4	8	16	0

$C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$ R= 0

3 $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

$C(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 18$ R= 56

Binomio al cuadrado

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

Suma por diferencia

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$(2x + 5) \cdot (2x - 5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$$

Binomio al cubo

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$$

$$(x + 3)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 + 3^3 =$$

$$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

$$(2x - 3)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 - 3^3 =$$

$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

Trinomio al cuadrado

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$$

$(x^2 - x + 1)^2 =$

$= (x^2)^2 + (-x)^2 + 1^2 + 2 \cdot x^2 \cdot (-x) + 2x^2 \cdot 1 + 2 \cdot (-x) \cdot 1 =$

$= x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 + 2x^2 - 2x =$

$= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

Suma de cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

$8x^3 + 27 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

Diferencia de cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

$8x^3 - 27 = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$

Producto de dos binomios que tienen un término común

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$(x + 2)(x + 3) =$

$= x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3 =$

$= x^2 + 5x + 6$

Ejercicios resueltos de productos notables

1 Desarrolla los binomios al cuadrado.

1 $(x + 5)^2 =$

$= x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 =$

$= \mathbf{x^2 + 10x + 25}$

2 $(2x - 5)^2 =$

$= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 =$

$= \mathbf{4x^2 - 20x + 25}$

2 $(2x - 5)^2 =$

$= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 =$

$= \mathbf{4x^2 - 20x + 25}$

4 $\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)^2 =$

$= \left(x^2\right)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 =$

$= x^4 - x^3 + \frac{1}{4}x^2$

2 Desarrolla los binomios al cubo.

1 $(2x - 3)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 - 3^3 =$

$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

2 $(x + 2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 =$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

3 $(3x - 2)^3 = (3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot 2^2 - 2^3 =$

$= 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

4 $(2x + 5)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2x \cdot 5^2 + 5^3 =$

$= 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$

3 Desarrolla las sumas por diferencias

1 $(3x - 2) \cdot (3x + 2) =$

$= (3x)^2 - 2^2 =$

$=$ $\mathbf{9x^2 - 4}$

2 $(x + 5) \cdot (x - 5) =$

$=$ $\mathbf{x^2 - 25}$

3 $(3x - 2) \cdot (3x + 2) =$

$= (3x)^2 - 2^2 =$

$=$ $\mathbf{9x^4 - 4}$

4 $(3x - 5) \cdot (3x - 5) =$

$= (3x)^2 - 5^2 =$

$=$ $\mathbf{9x^2 - 25}$

FÓRMULA DE LOS PRODUCTOS NOTABLES

CUADRADO DE LA SUMA DE DOS CANTIDADES

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

CUADRADO DE LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

PRODUCTO DE LA SUMA POR LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES

$(a + b) (a - b) = a^2 - b^2$

CUBO DE UNA SUMA

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

CUBO DE UNA DIFERENCIA

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS DE LA FORMA

$(x + a) (x + b) = x^2 + (a+b)x + ab$

FÓRMULA DE LOS COCIENTES NOTABLES

Cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades entre la suma de las cantidades

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$$

Cociente de la suma de los cubos de dos cantidades entre la suma de las cantidades

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$$

Cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades entre la diferencia de las cantidades

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

Cociente de la diferencia de los cubos de dos cantidades entre la diferencia de las cantidades

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$$

Teorema del resto

El **resto de la división de un polinomio P(x)**, entre un **polinomio** de la forma **(x - a)** es el **valor numérico** de dicho **polinomio** para el valor: **x = a**.

$P(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ $Q(x) = x - 3$

$P(x) : Q(x)$

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

$P(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^2 + 2 = 81 - 27 + 2 =$ **56**

Teorema del factor

El **polinomio P(x)** es **divisible** por un **polinomio** de la forma **(x - a)** si y sólo si **P(x = a) = 0**.

Al valor **x = a** se le llama **raíz o cero** del **poinomio P(x)**.

$P(x) = x^2 - 5x + 6$

$P(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

$P(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

x = 2 y x = 3 son **raíces o ceros del polinomio**: $P(x) = x^2 - 5x + 6$, porque P(2) = 0 y P(3) = 0.

Raíces de un polinomio

1Los **ceros o raíces de un polinomio** son **divisores del término independiente** del polinomio.

2A cada **raíz** del tipo **x = a** le corresponde un **binomio** del tipo **(x — a)**.

3 Podemos expresar un **polinomio en factores** al escribirlo como **producto** de todos los **binomios** del tipo **(x — a)**, que se correspondan a las raíces, x = a, que se obtengan.

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$

4 La **suma de los exponentes de los binomios** ha de ser igual al **grado del polinomio**.

5 Todo **polinomio** que **no** tenga **término independiente** admite como raíz **x = 0**, ó lo que es lo mismo, admite como **factor x**.

$x^2 + x = x \cdot (x + 1)$

Raíces: $x = 0$ y $x = -1$

6 Un **polinomio** se llama **irreducible** o **primo** cuando **no** puede **descomponerse en factores**.

$P(x) = x^2 + x + 1$

Ejercicio

Hallar las raíces y descomponer en factores el polinomio:

$Q(x) = x^2 - x - 6$

Los divisores del término independiente son ±1, ±2, ±3.

$Q(1) = 1^2 - 1 - 6 \neq 0$

$Q(-1) = (-1)^2 - (-1) - 6 \neq 0$

$Q(2) = 2^2 - 2 - 6 \neq 0$

$Q(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$

$Q(3) = 3^2 - 3 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$

Las raíces son: **$x = -2$ y $x = 3$.**

$Q(x) = (x + 2) \cdot (x - 3)$

1ºFactor común de un polinomio

Extraer factor común a un polinomio consiste en aplicar la **propiedad distributiva**.

$a \cdot x + b \cdot x + c \cdot x = x\,(a + b + c)$

Una **raíz del polinomio** será siempre **$x = 0$**

Descomponer en factores sacando factor común y hallar las raíces de:

1 **$x^3 + x^2 = x^2\,(x + 1)$**

La **raíces** son: $x = 0$ y $x = -1$

2 **$2x^4 + 4x^2 = 2x^2\,(x^2 + 2)$**

Sólo tiene una **raíz** $X = 0$; ya que el polinomio, $x^2 + 2$, no tiene ningún valor que lo anule; debido a que al estar la x al cuadrado siempre dará un número positivo, por tanto es irreducible.

3 **$x^2 - ax - bx + ab = x\,(x - a) - b\,(x - a) = (x - a) \cdot (x - b)$**

La **raíces** son $x = a$ y $x = b$.

2ºIgualdad notable

1Diferencia de cuadrados

Una diferencia de cuadrados es igual a suma por diferencia.

$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

Descomponer en factores y hallar las raíces

1 $x^2 - 4 = (X + 2) \cdot (X - 2)$

Las raíces son $X = -2$ y $X = 2$

2 $x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = (X + 2) \cdot (X - 2) \cdot (x^2 + 4)$

Las raíces son $X = -2$ y $X = 2$

2Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto es igual a un binomio al cuadrado.

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

Descomponer en factores los trinomio cuadrados perfectos y hallar sus raíces

$$9 + 6x + x^2 = (3 + x)^2$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ 3^2 & 2 \cdot 3 \cdot x & x^2 \end{array}$$

La raíz es $x = -3$.

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$$\downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow$$

$$x^2 \quad 2 \cdot x \cdot 2 \quad 2^2$$

La raíz es x = 2.

3ºTrinomio de segundo grado

Para **descomponer en factores el trinomio de segundo grado** $P(x) = a\,x^2 + bx + c$, **se iguala a cero y se resuelve la ecuación de 2º grado**. Si las soluciones a la ecuación son x_1 y x_2, el polinomio descompuesto será:

$$a\,x^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Descomponer en factores los trinomios de segundo grado y hallar sus raíces

$$x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2) \cdot (x-3)$$

Las raíces son x = 3 y x = 2.

$$x^2 - x - 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 6 = (x + 2) \cdot (x - 3)$$

Las raíces son x = 3 y x = − 2.

Descomponer en factores los trinomios de cuarto grado de exponentes pares y hallar sus raíces

$x^4 - 10x^2 + 9$

$x^2 = t$

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$t^2 - 10t + 9 = 0$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \dfrac{18}{2} = 9 \\ \searrow t_2 = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$x^2 = 9 \qquad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x^2 = 1 \qquad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$\mathbf{x^4 - 10x^2 + 9 = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)}$

$x^4 - 2x^2 + 3$

$x^2 = t$

$t^2 - 2t + 3 = 0$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \searrow t_2 = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$x^2 = 3 \qquad x = \pm\sqrt{3}$

$x^2 = -1 \qquad x = \pm\sqrt{-1} \in \mathbb{R}$

$x^4 - 2x^2 + 3 = (x^2 + 1) \cdot (x + \qquad) \cdot (x - \qquad)$

4º Factorización de un polinomio de grado superior a dos

Utilizamos el teorema del resto y la regla de Ruffini.

Descomposición de un polinomio de grado superior a dos y cálculo de sus raíces

$P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$

1Tomamos los divisores del término independiente: ±1, ±2, ±3.

2Aplicando el **teorema del resto** sabremos para que valores la división es exacta.

$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 - 8 \cdot 1^2 - 1 + 6 = 2 + 1 - 8 - 1 + 6 = 0$

3Dividimos por Ruffini.

	2	1	−8	−1	6
1		2	3	−5	−6
	2	3	−5	−6	0

4Por ser la división exacta, D = d · c

$(x - 1) \cdot (2x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$

Una raíz es x = 1.

Continuamos realizando las mismas operaciones al segundo factor.

Volvemos a probar por 1 porque el primer factor podría estar elevado al cuadrado.

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 \neq 0$

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = -2 + 3 + 5 - 6 = 0$

	2	3	−5	−6
−1		−2	−1	6
	2	1	−6	0

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (2x^2 + x - 6)$

Otra raíz es x = -1.

El tercer factor lo podemos encontrar aplicando la ecuación de 2º grado o tal como venimos haciéndolo, aunque tiene el inconveniente de que sólo podemos encontrar **raíces enteras**.

El 1 lo descartamos y seguimos probando por − 1.

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 6 \neq 0$

$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 - 6 \neq 0$

$P(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 6 = 2 \cdot 4 - 2 - 6 = 0$

	2	1	−6
−2		−4	6
	2	−3	0

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (2x - 3)$

Sacamos **factor común** 2 en último binomio.

$2x - 3 = 2\,(x - 3/2)$

La **factorización del polinomio** queda:

$P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 2\,(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3/2)$

Las raíces son : $x = 1$, $x = -1$, $x = -2$ y $x = 3/2$

Ejercicios resueltos de factorización de polinomios

Factorizar los polinomios

1 $9x^4 - 4x^2 =$

$x^2 \cdot (9x^2 - 4) =$

$x^2 \cdot (3x + 2) \cdot (3x - 2)$

2 $x^5 + 20x^3 + 100x =$

$x \cdot (x^4 + 20x^2 + 100) =$

$x \cdot (x^2 + 10)^2$

3 $3x^5 - 18x^3 + 27x =$

$3x \cdot (x^4 - 6x^2 + 9) =$

$= 3x \cdot (x^2 - 3)^2$

4 $2x^3 - 50x =$

$= 2x \cdot (x^2 - 25) =$

$2x \cdot (x + 5) \cdot (x - 5)$

5 $2x^5 - 32x =$

$= 2x \cdot (x^4 - 16) =$

$2x \cdot (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) =$

$= 2x \cdot (x^2 + 4) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$

6 $2x^2 + x - 28$

$2x^2 + x - 28 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 28}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 224}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{4} = \frac{-1 \pm 15}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \\ \searrow x_2 = \frac{-16}{4} = -4 \end{cases}$$

$2x^2 + x - 28 =$ **$2 (x + 4) \cdot (x - 7/2)$**

Descomponer en factores los polinomios

1 $\frac{2}{5}x^5 - \frac{6}{5}x^4 + \frac{14}{15}x^2 =$

$$= \frac{2}{5}x^2\left(x^3 - 3x^2 + \frac{7}{3}\right)$$

2 $xy - 2x - 3y + 6 =$

$= x \cdot (y - 2) - 3 \cdot (y - 2) =$

$= \mathbf{(x - 3) \cdot (y - 2)}$

3 $25x^2 - 1 =$

$= \mathbf{(5x + 1) \cdot (5x - 1)}$

4 $36x^6 - 49 =$

$= \mathbf{(6x^3 + 7) \cdot (6x^3 - 7)}$

5 $x^2 - 2x + 1 =$

$= \mathbf{(x - 1)^2}$

6 $x^2 - 6x + 9 =$

$= \mathbf{(x - 3)^2}$

7 $x^2 - 20x + 100 =$

$= \mathbf{(x - 10)^2}$

8 $x^2 + 10x + 25 =$

$= \mathbf{(x + 5)^2}$

9 $x^2 + 14x + 49 =$

$= \mathbf{(x + 7)^2}$

10 $x^3 - 4x^2 + 4x =$

$= x \cdot (x^2 - 4x + 4) =$

$= \mathbf{x \cdot (x - 2)^2}$

11 $3x^7 - 27x =$

$= 3x \cdot (x^6 - 9) =$

$= \mathbf{3x \cdot (x^3 + 3) \cdot (x^3 - 3)}$

12 $x^2 - 11x + 30$

$x^2 - 11x + 30 = 0$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 30}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{121 - 120}}{2} = \frac{11 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{12}{2} = 6 \\ \searrow x_2 = \frac{10}{2} = 5 \end{cases}$$

$x^2 - 11x + 30 = \mathbf{(x - 6) \cdot (x - 5)}$

13 $3x^2 + 10x + 3$

$3x^2 + 10x + 3 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{18}{6} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$3x^2 + 10x + 3 = \mathbf{3\,(x - 3) \cdot (x - 1/3)}$

14 $2x^2 - x - 1$

$2x^2 - x - 1 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{4}{4} = 1 \\ \searrow x_2 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$2x^2 - x - 1 = \mathbf{2\,(x - 1) \cdot (x + 1/2)}$

Factorizar y hallar las raíces de los polinomios

1 **$2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$**

$P(1) = 2 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 3 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 8 & -3 \\ 1 & & 2 & -5 & 3 \\ \hline & 2 & -5 & 3 & 0 \end{array}$$

$(x - 1) \cdot (2x^2 - 5x + 3)$

$P(1) = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0$

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -5 & 3 \\ 1 & & 2 & -3 \\ \hline & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$(x - 1)^2 \cdot (2x - 3) =$ **$2\,(x - 3/2) \cdot (x - 1)^2$**

Las raíces son: $x = 3/2$ y $x = 1$

$2x^3 - x^2 - 4$

$\{\pm1, \pm2, \pm4\}$

$P(1) = 1^3 - 1^2 - 4 \neq 0$

$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 4 \neq 0$

$P(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & & 2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$(x - 2) \cdot (x^2 + x + 2)$

$x^2 + x + 2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$(x - 2) \cdot (x^2 + x + 2)$

Raíz: **x = 2.**

3x³ + 3x² −4 x − 12

$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$

$P(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 12 \neq 0$

$P(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 12 \neq 0$

$P(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 12 = 8 + 12 - 8 - 12 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 2 & & 2 & 10 & 12 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

$(x - 2) \cdot (x^2 + 5x + 6)$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{-4}{2} = -2 \\ \searrow x_2 = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

$(x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$

Las raíces son : **x = 2, x = − 2, x = − 3.**

46x³ + 7x² − 9x + 2

{±1, ±2}

$P(1) = 6 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 2 \neq 0$

$P(-1) = 6 \cdot (-1)^3 + 7 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 2 \neq 0$

$P(2) = 6 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 2 \neq 0$

$P(-2) = 6 \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-2)^2 - 9 \cdot (-2) + 2 = -48 + 28 + 18 + 2 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & -9 & 2 \\ -2 & & -12 & 10 & -2 \\ \hline & 6 & -5 & 1 & 0 \end{array}$$

$(x+2) \cdot (6x^2 - 5x + 1)$

$6x^2 - 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ \searrow x_2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$6 \cdot (x + 2) \cdot (x - 1/2) \cdot (x - 1/3)$

Raíces: x = − 2, x = 1/2 y x= 1/3

PREGUNTAS 01) $x^2 + 8x + 15$ 02) $n^2 + n - 20$ 03) $m^2 - 12m + 27$ 04) $x^2 - 2x - 24$ 05) $x^2 + 20x + 75$ 06) $y^2 +$

$16y - 80$ 07) $x^2 - 25x + 100$ 08) $y^2 - 6y - 72$ 09) $y^2 + \frac{5y}{6} + \frac{1}{6}$ 10) $x^2 + \frac{x}{20} - \frac{1}{20}$ 11) $x^2 + 0.6x - 2.16$ 12) $y^2 - 0.2y - 1.95$ 13) $x^2 + 35x + 300$ 14) $y^2 + 10y - 600$ 15) $z^2 + 12z - 693$ 16) $w^2 - 69w + 1080$ 17) $x^2y^2 + 34xy + 120$ 18) $z^2 - 2.3z + 1.26$ 19) $w^2 + 0.8w + 0.15$ 20) $403 - 44x + x^2$

Ingrese a esta dirección y resuelve los ejercicios en línea

http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/afx.htm

Una fracción algebraica es el cociente de dos polinomios y se representa por:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad Q(x) \neq 0$$

Fracciones algebraicas equivalentes

Dos fracciones algebraicas

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{y} \quad \frac{R(x)}{S(x)}$$

son equivalentes, y lo representamos por:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$$

si se verifica que **P(x) · S(x) = Q(x) · R(x)**.

$$\frac{x+2}{x^2-4} \quad \text{y} \quad \frac{1}{x-2}$$

son **fracciones algebraicas equivalentes** porque:

$(x + 2) \cdot (x - 2) = x^2 - 4$

Dada una **fracción algebraica**, si **multiplicamos** el **numerador** y el **denominador**de dicha fracción por un mismo **polinomio** distinto de cero, la **fracción algebraica** resultante es **equivalente** a la dada.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)\cdot M(x)}{Q(x)\cdot M(x)} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x):M(x)}{Q(x):M(x)}$$

Simplificación de fracciones algebraicas

Para **simplificar** una **fracción algebraica** se **divide** el **numerador** y el **denominador** de la fracción por un **polinomio** que sea factor común de ambos.

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)\cdot(x-2)} = \frac{(x+2)}{(x-2)}$$

Amplificación de fracciones algebraicas

Para **amplificar** una **fracción algebraica** se **multiplica** el **numerador** y el **denominador** de la fracción por un **polinomio**.

$$\frac{(x+2)}{(x-2)}\cdot\frac{(x+2)}{(x+2)} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)\cdot(x-2)} = \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$$

Reducción de fracciones algebraicas a común denominador

1Se **descomponen** los **denominadores en factores** para hallarles el **mínimo común múltiplo**, que será el común denominador.

$$\frac{x}{x^2-1} \quad y \quad \frac{1}{x^2+3x+2}$$

$x^2 - 1 = (x+1) \cdot (x - 1)$

$x^2 + 3x + 2 = (x+1) \cdot (x + 2)$

m.c.m.$(x^2 - 1, x^2 + 3x + 2) = (x+ 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$

2 Dividimos el **común denominador** entre los **denominadores** de las fracciones dadas y el resultado lo **multiplicamos** por el **numerador** correspondiente.

$$\frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x-1)} = (x+2)$$

$$\frac{x\cdot\ (x+2)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)} = \frac{x^2+2x}{x^3+2x^2-x-2}$$

$$\frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x+2)} = (x-1)$$

$$\frac{(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)} = \frac{(x-1)}{x^3+2x^2-x-2}$$

Operaciones con fracciones algebraicas

Suma de fracciones algebraicas

Con el mismo denomiminador

$$\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)+R(x)}{Q(x)}$$

$$\frac{x^2-x}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{x+3}{x^2-5x+6}=$$

$$=\frac{x^2-x+1-(x+3)}{x^2-5x+6}=$$

$$= \frac{x^2 - x + 1 - x - 3}{x^2 - 5x + 6} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 5x + 6}$$

Con distinto denomiminador

En primer lugar se ponen las **fracciones algebraicas** a **común denominador**, posteriormente se **suman los numeradores**.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot S(x) + R(x) \cdot Q(x)}{Q(x) \cdot S(x)}$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x-1} =$$

$$x^2 - 1 = (x+1) \cdot (x-1)$$

$$\text{m.c.m.}(x+1,\ x^2 - 1,\ x - 1) = (x+1) \cdot (x-1)$$

$$= \frac{x - 1 + 2x - (x+1)}{(x+1) \cdot (x-1)} =$$

$$= \frac{x - 1 + 2x - x - 1}{(x+1) \cdot (x-1)} =$$

$$= \frac{2x - 2}{(x+1) \cdot (x-1)} =$$

$$= \frac{2 \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x-1)} =$$

$$= \frac{2}{(x+1)}$$

Multiplicación de fracciones algebraicas

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot R(x)}{Q(x) \cdot S(x)}$$

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} =$$

$$= \frac{(x^2 - 2x) \cdot (x^2 + 4x + 4)}{(x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 - 4)} =$$

$$= \frac{x(x-2) \cdot (x+2)^2}{(x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-2) \cdot (x+2)} =$$

$$= \frac{x(x+2)}{(x-2) \cdot (x-3)}$$

División de fracciones algebraicas

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot S(x)}{Q(x) \cdot R(x)}$$

$$\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} : \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} =$$

$$= \frac{(x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 4)}{(x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 + 4x + 4)} =$$

$$= \frac{x(x+2) \cdot (x+2) \cdot (x-2)}{(x-2) \cdot (x-3) \cdot (x+2)^2} =$$

$$= \frac{x}{x-3}$$

Ejercicios resueltos de fracciones algebraicas

1 **Simplificar las fracciones algebraicas**

1 $\frac{x^2-3x}{x^2+3x}=$

$=\frac{x\cdot(x-3)}{x\cdot(x+3)}=$

$=\frac{(x-3)}{(x+3)}$

2 $\frac{x^2-3x}{3-x}=$

$=\frac{x(x-3)}{3-x}=\frac{-x(x-3)}{-3+x}=-x$

$\frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}=$

$=\frac{(x-1)\cdot(x+2)}{(x-1)\cdot(x^2-1)}=$

$=\frac{(x+2)}{(x^2-1)}$

3 $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}=$

$\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x-4)}=$

$=\frac{(x-2)}{(x-4)}$

4 $$\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}=$$

$$\frac{(x+1)\cdot(x-3)}{(x-2)\cdot(x+1)}=$$

$$=\frac{(x-3)}{(x-2)}$$

5 $$\frac{x^3-19x-30}{x^3-3x^2-10x}=$$

$$\frac{(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x-5)}{x\cdot(x+2)\cdot(x-5)}=$$

$$=\frac{x+3}{x}$$

2 **Suma las fracciones algebraicas**

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}=$$

$$x^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$$

$$\text{m.c.m.}(x+1,\ x^2-1,\ x-1)=(x+1)\cdot(x-1)$$

$$=\frac{x-1+2x-(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=$$

$$=\frac{x-1+2x-x-1}{(x+1)\cdot(x-1)}=$$

$$=\frac{2x-2}{(x+1)\cdot(x-1)}=$$

$$=\frac{2\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=$$

$$= \frac{2}{(x+1)}$$

3Resta las fracciones algebraicas

$$\frac{x+2}{x^3-1} - \frac{1}{x-1} =$$

$$x^3 - 1 = (x-1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

$$\text{m.c.m.}(x^3 - 1,\ x - 1) = (x-1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

$$= \frac{x + 2 - (x^2 + x + 1)}{(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)} =$$

$$= \frac{x + 2 - x^2 - x - 1}{(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)} =$$

$$= \frac{-(x^2 - 1)}{(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)} =$$

$$= \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)} =$$

$$= \frac{-(x+1)}{x^2 + x + 1}$$

4Multiplica las fracciones algebraicas

1 $$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} =$$

$$= \frac{(x^2 - 2x) \cdot (x^2 + 4x + 4)}{(x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 - 4)} =$$

$$= \frac{x(x-2)\cdot(x+2)^2}{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)} =$$

$$= \frac{x(x+2)}{(x-2)\cdot(x-3)}$$

2 $$\frac{9-6x+x^2}{9-x^2}\cdot\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x} =$$

$$= \frac{(9-6x+x^2)\cdot(x^2-5x+6)}{(9-x^2)\cdot(3x^2-9x)} =$$

$$= \frac{(3-x)^2\cdot(x-3)\cdot(x-2)}{(3+x)\cdot(3-x)\cdot 3x(x-3)} =$$

$$= \frac{(3-x)\cdot(x-2)}{3x\cdot(3+x)}$$

Opera

$$\left(x+\frac{x}{x-1}\right)\cdot\left(x-\frac{x}{x-1}\right) =$$

$$= x^2-\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = x^2-\frac{x^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2\cdot(x-1)^2-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2\left[(x-1)^2-1\right]}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2\cdot(x-1-1)\cdot(x-1+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2\cdot(x-2)\cdot x}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^3\cdot(x-2)}{(x-1)^2}$$

5 **Efectúa las operaciones.**

$$\left(x+\frac{x}{x-1}\right):\left(x-\frac{x}{x-1}\right)=$$

$$=\frac{x\cdot(x-1)+x}{x-1}:\frac{x\cdot(x-1)-x}{x-1}=$$

$$=\frac{x^2-x+x}{x-1}:\frac{x^2-x-x}{x-1}=$$

$$=\frac{x^2}{x-1}:\frac{x^2-2x}{x-1}=\frac{x^2\cdot(x-1)}{x\cdot(x-2)\cdot(x-1)}=$$

$$=\frac{x}{(x-2)}$$

6 **Realiza las operaciones.**

$$\frac{x}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=$$

$$\frac{x}{1+\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}=\frac{x}{1+\frac{x}{x+1}}=\frac{x}{\frac{x+1+x}{x+1}}=\frac{x}{\frac{2x+1}{x+1}}=\frac{x(x+1)}{2x+1}$$

Una **ecuación** es una **igualdad** que se cumple para algunos valores de las letras.

$x + 1 = 2$ $\qquad$ $x = 1$

Ejercicios de productos notables

1) $(x + 5)^2 =$ $\quad$ 2) $(7a + b)^2 =$ $\quad$ 3) $(4ab^2 + 6xy^3)^2 =$ $\quad$ 4) $(x^{a+1} + y^{b-2})^2 =$

5) $(8 - a)^2 =$ 6)$(3x^4 - 5y^2)^2 =$ 7) $(x^{a+1} - 4x^{a-2})^2 =$ 8) $(5a + 10b)(5a - 10b) =$
9)$(7x^2 - 12y^3)(7x^2 + 12y^3) =$ 10) $(x + 4)^3 =$ 11) $(5x + 2y)^3 =$

12) $(2x^2y + 4m)^3 =$ 13) $(1 - 4y)^3 =$ 14) $(3a^3 - 7xy^4)^3 =$ 15) $(2x^{a+4} - 8y^{a-1})^3 =$
16) $(x + 5)(x + 3) =$ 17) $(a + 9)(a - 6) =$ 18) $(y - 12)(y - 7) =$

19) $(4x^3 + 15)(4x^3 + 5) =$ 20) $(5y^{a+1} + 4)(5y^{a+1} - 14) =$

EJERCICIOS DE COCIENTES NOTABLES

	PREGUNTAS		RESPUESTAS		PREGUNTAS		RESPUESTAS
01	$\dfrac{a^2 - 16}{a + 4}$	=	$a - 4$	11	$\dfrac{125a^3 + 27b^3}{5a + 3b}$	=	$25a^2 - 15ab + 9b^2$
02	$\dfrac{25x^2 - 49y^2}{5x + 7y}$	=	$5x - 7y$	12	$\dfrac{x^9 + y^6}{x^3 + y^2}$	=	$x^6 - x^3y^2 + y^4$
03	$\dfrac{4a^2 - 16x^2y^4}{2a + 4xy^2}$	=	$2a + 4xy^2$	13	$\dfrac{27m3 - 1}{3m - 1}$	=	$9m^2 + 3m + 1$
04	$\dfrac{x^{2a} - y^{2b}}{x^a + y^b}$	=	$x^a - y^b$	14	$\dfrac{8a^{12} - 125b^{15}}{2a^4 - 5b^5}$	=	$4a^8 + 10a^4b^5 + 25b^{10}$
05	$\dfrac{9 - 36x^4}{3 - 6x^2}$	=	$3 + 6x^2$	15	$\dfrac{343a^3 - 1000b^{18}}{7a - 10b^6}$	=	$49a^2 + 70ab^6 + 100b^{12}$

06 $$\frac{16x^4 - 25y^4}{4x^2 - 5y^2} = 4x^2 + 5y^2$$

07 $$\frac{(x + y)^2 - 100}{(x + y) - 10} = (x + y) + 10$$

08 $$\frac{169 - (a - b)^2}{13 - (a - b)} = 13 + (a - b)$$

09 $$\frac{1 + x^3}{1 + x} = 1 - x + x^2$$

10 $$\frac{64x^3 + 27y^3}{4x + 3y} = 16x^2 - 12xy + 9y^2$$

16 $$\frac{729x^3y^6 - 512z^9}{9xy^2 - 8z^3} = 81x^2y^4 + 72xy^2z^3 + 64z^6$$

17 $$\frac{(a + b)^4 - 49m^6}{(a + b)^2 - 7m^3} = (a + b)^2 + 7m^3$$

18 $$\frac{x^{4a+2} - 400}{x^{2a+1} - 20} = x^{2a+1} + 20$$

http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/algebra.htm

INGRESE A LA DIRECCIÓN ARRIBA DESCRITA Y RESUELVA LOS EJERCICIOS DE LA EVALUACIÓN

Bibliografía

http://carmesimatematic.webcindario.com/cuadernoactividadescuarto.htm

http://www.vitutor.net/1/38.html Los contenidos y titularidad del dominio corresponden a Juan Carlos Fernández Gordillo, para más información sobre **vitutor.net** puedes consultar la página: http://www.whois.net/whois_new.cgi?d=vitutor.net&tld=com.

http://www.eduteka.org/SoftMath5.php Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), Estándares Curriculares para Matemáticas, Bogotá, Mayo de 2003

Allendoerfer, C y Oakley, Cletus O. Matemáticas Universitarias. Cuarta edición revisada. Editorial Mc Graww- Hill. Santafé de Bogotá D.C. 1994 Cáp. 4, 5, 6, 7, 8, 10 y 11.

Arya, J y Lardner, R. Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía. Tercera edición. Editorial Prentice Hall. 1989. capítulos 1 al 6.

Materiales de apoyo elaborados por el tutor sobre álgebra básica y ecuaciones y sus aplicaciones.

Sydsaeter – Hammond, Knut – Meter J.: Matemáticas para el análisis económico; Prentice – Hall, 1996.